Making Comparisons of Relative Size: A Secondary Topic Critical in College STEM Courses

상대적 크기 비교
대학 STEM 과목에서 중요한 학교 수학 주제

Cameron O'Neill Byerley

카메론 바이어리 교수(조지아 대학교)

Thank you National Science Foundation grants (COVID-TASER and Project Aspire).

이 연구는 미국 국립 과학 재단의 지원을 받아 수행되었습니다.

발표 요약
Summary of Talk

Part 1: Mathematical ideas that help us make comparisons of relative size are useful in university mathematics. (Janet's transition to university calculus.)

파트 1: 상대적 크기에 관한 비교가 대학 수학에서 유용하다는 점을 알려주는 수학적 아이디어 (대학 미적분학에 관한 Janet의 전이)

Part 2: Despite the importance of concepts such as ratio, fraction, rate of change, percentage, derivative, measurement, and unit conversions, many undergraduates do not have productive quantitative meanings for these ideas. (Project Aspire, Calculus Tests)

파트 2: 비율, 분수, 변화율, 도함수, 크기, 단위 전환에 관한 개념의 중요성에도 불구하고 다수의 대학생은 이러한 아이디어에 대한 생산적인 의미를 갖추지 않았다.

Part 3: How should university instructors help students make comparisons of relative size while teaching college content?

파트 3: 대학의 교수자들은 대학 내용을 가르칠 때 어떻게 학생들이 상대적 크기를 비교하도록 돕는가?

연구의 동기

Motivating experiences for my Research

I tried to teach high school math conceptually and wondered what my students were capable of understanding meaningfully given their current mathematical thinking.

나는 개념적으로 고등학교 수학을 가르치려고 노력했고, 수학적 사고를 학생들이 의미 있게 이해할 수 있는 것이 무엇인지 궁금해했다.

My first year I taught 9th grade algebra to students who were considered by the school to be about 4 grade levels behind.

첫 번째 해에 나는 4학년 수준에 있는 것으로 여겨지는 학생들에게 9학년 대수를 가르쳤다.

Given my students' current mathematical understandings, I wondered what is ethical? Teaching below grade level has ethical issues. Teaching concepts they don't have the prior knowledge they need to understand has different ethical problems.

나의 수학적 이해에서, 무엇이 윤리적인지 궁금했다. 낮은 수준의 학생을 가르치는 것은 윤리적인 이슈가 있다. 학생들이 사전 지식을 갖추지 않은 개념을 가르치면서 학생들은 다른 윤리적 문제를 이해할 필요가 있다.

연구 동기: Thompson 교수의 미적분학 재설계

Motivating Experiences: Dr. Thompson's Calculus Redesign

Thompson designed the class to "address two fundamental situations: (a) you know how fast a quantity is changing and you want to know how much of it there is, and (b) you know how much of a quantity there is and you want to know how fast it is changing" (Thompson, Byerley, et al., 2013, p. 125).

Thompson은 "두 기본적인 상황을 해결하는 교실을 설계했다. (a) 양이 얼마나 빨리 변하는지 알고, 양이 얼마나 있는지 알고 싶으며, (b) 얼마나 많은 양이 있는지 알고, 양이 얼마나 빨리 변하는지 알고 싶다고 하자. (P. W. Thompson, Byerley, et al., 2013, p. 125).

The self-published textbook (Thompson and Ashbrook, 2016) is available online and the curriculum has been described by Thompson, Byerley, and Hatfield (2013) and by Thompson and Dreyfus (2016). http://patthompson.net/ThompsonCalc/

집필한 교과서는 (Thompson and Ashbrook, 2016) 온라인 상에서 이용할 수 있고, 교육과정은 Thompson, Byerley, Hatfield (2013)과 Thompson, Dreyfus (2016)에 의해 작성되었다. http://patthompson.net/ThompsonCalc/

연구 동기: Thompson 교수의 미적분학 재설계

Motivating Experiences: Dr. T's Calculus Redesign

Why do some students love conceptual calculus and why do others hate it?

왜 어떤 학생들은 개념적인 미적분학을 좋아하고, 또 다른 학생들은 싫어하는가?

"I took Calculus before I entered his class and felt like I had a fairly good understanding of it because I could find answers easily to most problems. Dr. T expanded my notion of what it means to understand something and I now feel like I finally understand the Fundamental Theorem of Calculus meaningfully and how someone might of thought of it!"

"저는 Thompson 교수님의 과목을 수학하기 전에 미적분학을 수강했고, 대부분의 문제에 대한 답을 쉽게 찾을 수 있었기 때문에 상당히 잘 이해하고 있는 것 같았습니다. Thompson 교수님은 무언가를 이해한다는 것이 의미하는 바에 대한 나의 개념을 확장하게 해주었으며, 결국 미적분학의 기본 정리를 의미 있게 이해하고, 누군가 그것을 어떻게 생각할 수 있는지를 알게 되었습니다!"

"Dr. T. is an incredible teacher with a powerful ability to connect with students. He was very helpful and frankly has offered the greatest mathematics education I have ever experienced."

"Thompson 교수님은 학생들과 소통할 수 있는 강력한 능력을 가진 놀라운 교사입니다. Thompson 교수님은 매우 도움이 되었고, 솔직히 제가 경험한 최고의 수학교육을 제공했습니다,"

Student reviews from first year of implementation of Pat Thompson's conceptual calculus curriculum. (2011-2012)

Thomson 교수의 개념적인 미적분학 교육과정의 첫 번째 해의 실행에서 학생들의 리뷰

Motivating Experiences: Dr. T's Calculus Redesign

"Worst professor I have ever had. Seriously, even if you knew calculus before going into his class, it's extremely difficult. He's a jerk and his TAs are creepy, help was offered but pointless since he sucks at teaching. Retook calc with another teacher and aced it. DO NOT TAKE HIS CLASS I WARN YOU!"

"내가 만났던 최악의 교수. 진심으로요. Thompson 교수님의 수업 이전에 미적분학을 알았더라도 매우 어려웠습니다. Thomspon 교수님은 얼간이이고, 조교는 소름끼쳤으며, 지원이 제공되었지만, 그들이 가르치는 것을 짜증스러워했기 때문에 무의미했습니다. 다른 강사 과목을 재수강하고 학점을 받았습니다. Thomspon 교수의 수업을 듣지 마십시오,"

Student reviews from first year of implementation of Pat Thompson's conceptual calculus curriculum. (2011-2012)

Thomson 교수의 개념적인 미적분학 교육과정의 첫 번째 해의 실행에서 학생들의 리뷰

Motivating Experiences: Dr. T's Calculus Redesign

I noticed that many topics known to be difficult in calculus literature involved thinking of a quotient as a **measure** of a relative size (rate of change, derivatives, average rate of change, slope, trigonometry).

I started asking students about their meanings for the elementary topics that were foundational to what they were learning in calculus (Byerley, Hatfield, Thompson, 2012; Byerley and Hatfield, 2013).

상대적 크기(변화율, 도함수, 평균변화율, 기울기, 삼각법)의 관한 측정으로 몫에 관한 사고가 포함된 미적분학 문헌에서 많은 주제가 어려운 것으로 알려져 있습니다.

나는 학생들에게 미적분학에서 배워야 하는 것에 관한 기본이 되는 기초적인 주제에 대해서 학생들의 의미를 묻기 시작했습니다 (Byerley, Hatfield, Thompson, 2012; Byerley and Hatfield, 2013).

Motivating Literature: Non-multiplicative meanings for rate of change and slope are common 연구 동기를 제공한 문헌: 변화율과 기울기에 관한 비곱셈적 의미가 일반적이다.

Stump (2001) found advanced secondary students are more likely to think of slope as an angle measure rather than a comparison of sizes of the changes in two quantities.

Stump (2001)은 우수한 고등학생이 기울기를 두 양의 변화의 크기를 비교하는 것이 아니라 각도 측정으로 생각할 가능성이 더 높다는 점을 발견했다.

Teachers frequently talk about a slope of m as meaning "as x changes by 1, y changes by m" (Byerley et al., 2016; Byerley & Thompson, 2017).

교사들은 m의 기울기를 "x가 1만큼 변함에 따라서, y가 m만큼 변하는"의미로 언급한다. (Byerley et al., 2016; Byerley & Thompson, 2017).

Lobato, Ellis, & Munoz (2009) found that students generalized a meaning for slope as the change in y from a classroom activity.

Lobato, Ellis, Munoz (2009)는 교실 활동에서 학생들이 기울기의 의미를 y의 변화로 일반화했다는 점을 발견했다.

연구 동기를 제공한 문헌
Motivating Literature

White and Michelmore (1996) found that students’ conception of variable was not strong enough for them to make sense of their conceptual calculus intervention.

White, Michelmore(1996)은 학생들의 변수에 대한 개념이 개념적 미적분학에서 개입을 이해하기에 충분하지 않다는 점을 발견했다.

White and Mitchelmore argued that while most existing research on calculus students’ thinking is on topics such as function, tangent, and limits that are particular to calculus, “another aspect that needs to be considered is the question of what other concepts are involved in applying calculus knowledge” (1996, p. 79).

White와 Michelmore는 미적분학을 수강하는 학생들의 사고에 대한 대부분의 기존 연구가 미적분학에 특유한 함수, 접선, 극한과 같은 주제이지만 “고려해야 할 또 다른 측면은 미적분학 지식의 응용에 관련된 다른 개념이 무엇인지에 관한 질문이다“ (1996, p. 79)

Motivating Literature: Other redesigned calculus courses were less successful than they hoped.

연구 동기를 제공한 문헌: 다른 재설계 미적분학 과목은 기대했던 것보다 덜 성공적이었다.

Habre and Abboud (2006) found that, “in the end, the one thing that is most striking is the large percentage of dropouts (33 students out of 89) and failures (12 of the remaining 56 students) in the observed sections” (p. 67).

At the end of their intervention study White and Mitchelmore (1996) concluded “almost the only detectable result of 24 hours of instruction intended to make the concept of rate of change more meaningful was an increase of manipulation-focus errors in symbolizing a derivative” (p. 93).

Habre, Abboud(2006)은 “놀랍게도 관찰된 분반에서 중도 탈락(89명 중 33명)과 F학점(나머지 56명 중 12명)의 비율이 높다”는 점을 발견했다(p. 67).

개입 연구를 종료하는 시점에서 White, Mitchelmore(1996)는 “변화율 개념을 보다 의미 있게 만들기 위한 24시간 교육에서 탐지 가능한 거의 유일한 결과는 도함수 기호 조작-위주 오류의 증가”라고 결론지었다(p. 93).

연구 동기가 되는 문헌: 다른 재설계 미적분학 과목은 기대했던 것보다 덜 성공적이었다.

Motivating Literature: Other redesigned calculus courses were less successful than they hoped.

Garner and Garner (2001) wrote "although the comparisons between the two groups showed *statistical* significance, there was no evidence of *educational significance:* both reform and traditional students forgot most of what they supposedly had learned" (p. 108).

Garner, Garner (2001)는 "두 그룹 간의 비교가 *통계적으로* 유의미한 것으로 나타났지만 *교육적 중요성*에 대한 증거는 없었다고 밝혔다: "개혁적인 학생과 전통적인 학생 모두 자신이 배운 내용을 대부분 잊어 버렸다"(p. 108).

Motivating Literature: rate is a hard idea for calculus students

연구 동기를 제공한 문헌: 비율은 미적분학 수강 학생에게 어려운 아이디어이다.

Thompson (1994) found that students' images of rate substantially impeded their progress in making sense of the Fundamental Theorem of Calculus (FTOC).

To many students a rate of change is not a **measure** of the change in *y* in terms of the change in *x*.

Thompson (1994)은 학생들의 비율 이미지가 미적분학 기본 정리 (FTOC, the Fundamental Theorem of Calculus)를 이해하는 진전을 상당히 방해한다는 것을 발견했다.

많은 학생들에게 변화율은 x의 변화에 대한 y 변화의 **측정**이 아니다.

Definitions of a few theoretical constructs

몇 가지 이론적 개념에 관한 정의

Scheme 도식

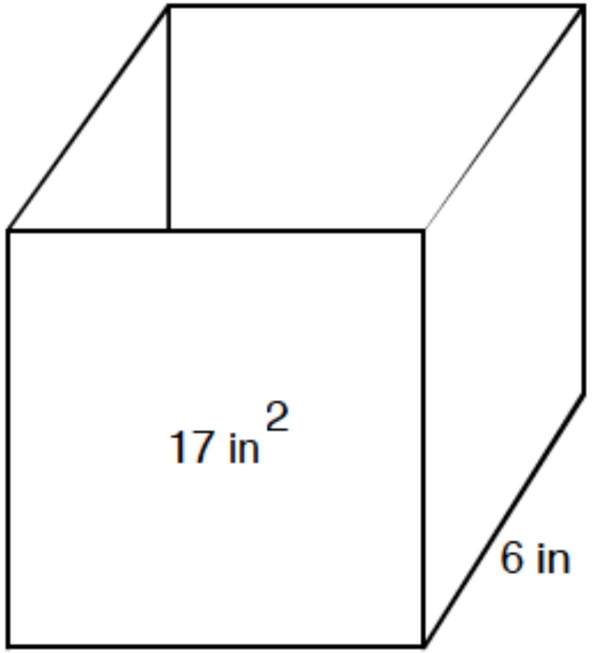
"We define a scheme as an organization of actions, operations, images, or schemes—which can have many entry points that trigger action—and anticipations of outcomes of the organization's activity (Thompson et al., 2014, p. 11).

"우리는 도식을 행동, 조작, 이미지 또는 도식의 조직 (행동을 유발하는 많은 진입 지점을 가질 수 있음)과 조직 활동의 결과에 대한 기대로 정의합니다. (Thompson et al., 2014, p. 11)."

양적 도식 VS 계산적 도식
Quantitative Versus Calculational Schemes

Thompson (2012) defined quantification as the mental process of conceiving of some aspect of an object as measurable and understanding that the measure of the object is some multiple of the chosen unit of measure.

Thompson (2012)은 정량화를 대상의 일부 측면을 측정 가능하다고 생각하고 대상의 측정이 선택한 측정 단위의 배수라는 것을 이해하는 정신적 과정으로 정의했다.

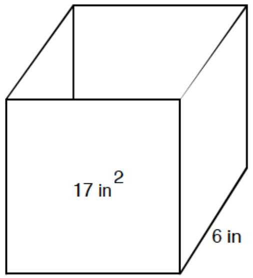


What is the volume of this box?

이 박스의 부피는 얼마인가?

Calculational Reasoning 계산적 추론

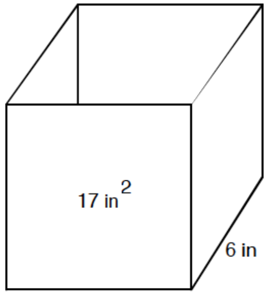
- Teacher: (Discusses with BJ how the diagram represents a hollow box and what about it eachnumber in the diagram indicated.)
- Student 1: (Reads question.) I don't know. There's not enough information.
- Teacher: What information do you need?
- Student 1: I need to know how long the other sides are.
- Teacher: What would you do if you knew those numbers?
- Student 1: Multiply them.
- Teacher: Any idea what you would get when you multiply them?
- Student 1: No. It would depend on the numbers.
- Teacher: Does 17 have anything to do with these numbers?
- Student 1: No. It's just the area of that face.



- 교사: (어떻게 다이어그램이 빈 상자를 나타내고 그것에 관해서 다이어그램의 각각의 숫자가 무엇을 나타내는지 BJ와 논의했다)
- 학생 1: (질문을 읽는다.) 잘 모르겠어요. 충분한 정보가 없어요.
- 교사: 어떤 정보가 필요하지?
- 학생1: 다른 변의 길이가 얼마나 긴지 알 필요가 있어요.
- 교사: 그 숫자를 알았다면 무엇을 할 수 있지?
- 학생1: 그것들을 곱해요.
- 교사: 곱했을 때 어떤 아이디어를 얻을 수 있을까?
- 학생1: 아니요. 아이디어는 수에 기초해요.
- 교사: 17은 이러한 숫자와 관련되니?
- 학생1: 아니요. 그 표면의 면적이에요.

Quantitative Reasoning 양적 추론

- Student 2: (Reads question.) Oh. Somebody's already done part of it for us.
- Teacher: What do you mean?
- Student 2: All we have to do now is multiply 17 and 6.
- Teacher: Some children think that you have to know the other two dimensions before you can answer this question. Do you need to know them?
- Student 2: No, not really.
- Teacher: What would you do if you knew them?
- Student 2: I'd just multiply them.
- Teacher: What would you get when you multiplied them?
- Student 2: 17.



- 학생 2: (질문을 읽는다). 오. 누군가 이미 우리를 위해 일부를 해주었네요.
- 교사: 무슨 말이야?
- 학생 2: 이제 우리가 해야하는 모든 건 17과 6을 곱하는 것이에요.
- 교사: 다른 아이들은 이 질문에 답하기 전에 다른 두 개의 차원을 알아야 할 필요가 있다고 생각했어. 그러한 것을 알 필요가 있을까?
- 학생 2: 아니요.
- 교사: 그것들을 알았다면 너는 무엇을 할 수 있을까?
- 학생 2: 그것들을 곱할 거예요.
- 교사: 그것들을 곱하면 무엇을 얻게 되니?
- 학생 2: 17.

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{12}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$$

Calculational Meanings for Fractions

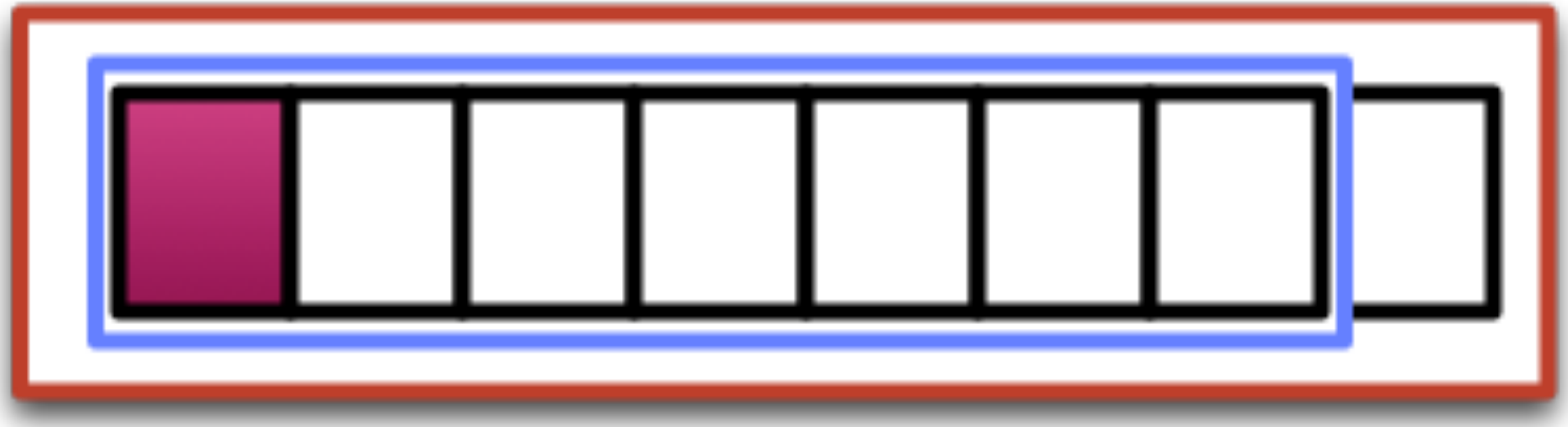
분수의 계산적 의미

A Quantitative Meaning for a Fraction

분수의 계산적 의미

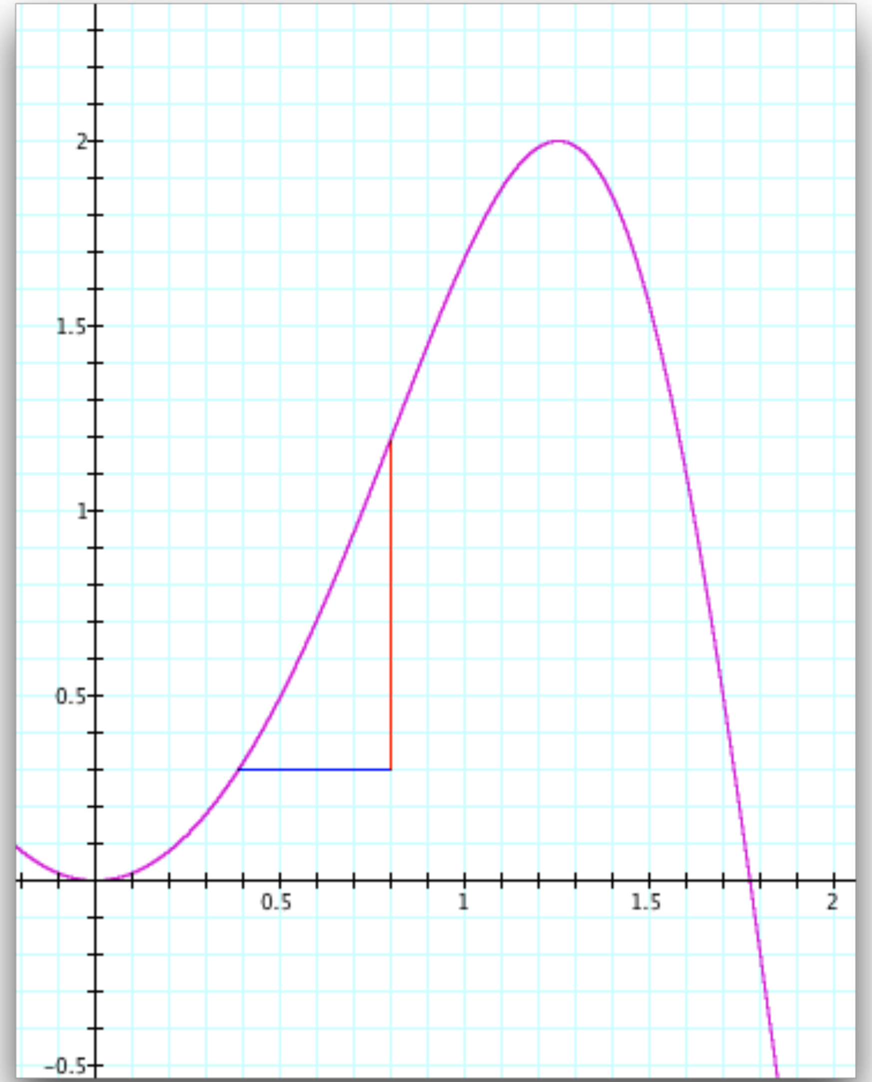
8/7 is eight copies of 1/7 of one whole

8/7은 전체의 1/7의 여덟 개이다.



How is a quantitative meaning for measurement related to difference quotients?

차이 몫 측정의
양적 의미는 어떠한가?



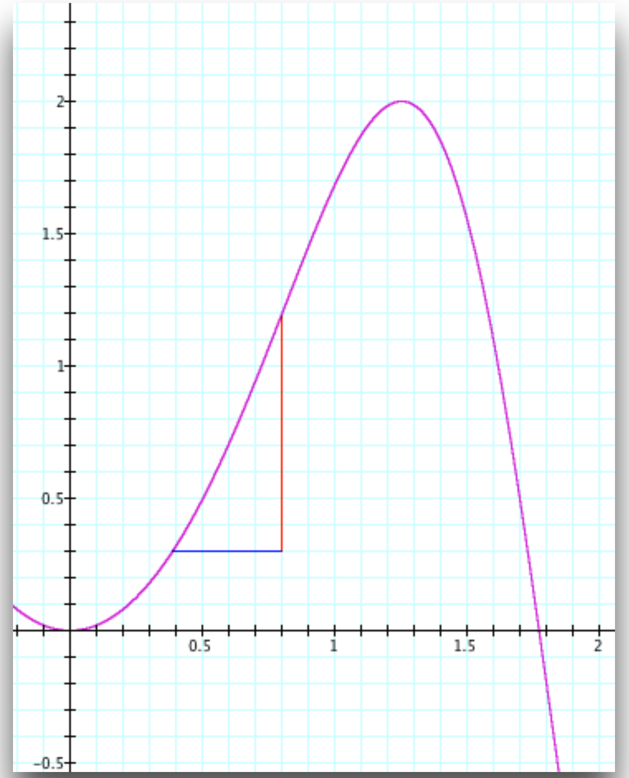
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

스스로에게 물어봅시다

: f(x+h)-f(x)의 양은 h의 몇 배가 될까?

Ask yourself: The quantity f(x+h)-f(x) is how many times as large as h?

Quantitative Rate of Change Function Scheme
양적 변화율 함수 도식



Constructing a graph of a rate of change function entails being able to imagine how a rate of change of the original function varies as the value of x varies (Thompson, 1994). The student should visualize a sequence of representations of changes in x and associated changes in y. Then the student should imagine how the quotient $\Delta y/\Delta x$ varies by measuring Δy in terms of Δx.

변화율 함수의 그래프를 구성하는 것은 x가 변화는 값에 따라서 원래 함수의 변화율이 어떻게 변하는지를 상상할 수 있게 한다(Thompson, 1994). 학생은 x가 변화, y의 변화에 관련된 일련의 표상을 시각화할 수 있다. 그 다음 그 학생은 Δx에 대한 Δy를 측정함으로써 어떻게 몫 Δy/Δx이 변하는지를 상상할 수 있다.

Calculational Rate of Change Function Scheme

양적 변화율 함수 도식

Constant Rule	$\frac{d}{dx}c = 0$	상수함수의 미분법
Power Rule	$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	거듭제곱함수의 도함수
Constant Multiple Rule	$\frac{d}{dx}c \cdot f(x) = c \cdot f'(x)$	상수 배수 함수의 미분법
Derivative of Sine	$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	사인함수의 도함수
Derivative of Cosine	$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	코사인함수의 도함수
Product Rule	$\frac{d}{dx}f \cdot g = f' \cdot g + f \cdot g'$	곱의 미분법
Quotient Rule	$\frac{d}{dx}\frac{f}{g} = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$	몫의 미분법
Chain Rule	$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	연쇄 법칙
Derivative of Exponential Functions	$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$	지수함수의 도함수
Derivative of Logarithmic Functions	$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$	로그함수의 도함수

Quantitative Fraction and Measure Schemes are Important for Later Learning

양적 분수와 측정 도식은 후속 학습에서 중요하다.

Steffe, Liss, and Young Lee (2014) found that students used developmentally advanced fraction schemes involving coordinating *three levels of units* (defined shortly) to construct an awareness of proportionality and a multiplicative conception of rate. Thus, long before students are ready for understanding rate of change functions they must coordinate three levels of units to support multiplicative fraction and measure schemes.

Steffe, Liss, Young Lee(2014)는 학생들이 비례에 대한 인식과 비율에 관한 곱셈 개념을 구성하기 위해 *세 가지 수준의 단위*(짧게 정의됨)를 조정하는 상급 분수 체계를 사용했음을 발견했다. 따라서 학생들이 변화율 함수를 이해할 준비가 되기 훨씬 전에 분수의 곱셈과 측정 체계를 지원하기 위해서는 세 가지 수준의 단위를 조정해야 한다.

Research Question for study of Janet's transition to university calculus (Byerley,

Janet의 대학 미적분학 과목 전이에 관한 연구의 연구 질문

How do students' fraction and measure, schemes impact their understandings of rate of change functions in a redesigned calculus course?

학생들의 분수와 측정에 대한 도식이 재설계 미적분학 과목에서 변화율 함수의 이해에 어떻게 영향을 미치는가?

질적 연구 방법

Qualitative Methods

Fall 2014: Tutored five students individually once a week and recorded observations.

2014년 가을학기: 일주일에 한번 다섯 명의 학생을 개별적으로 지도하고 관찰내용을 기록했다.

Spring 2015: Picked six calculus students and conducted three interviews with each student.

2015년 봄학기: 미적분학 수강생 6명을 선발하여, 각 학생과 세 번의 인터뷰를 진행했다.

This analysis focuses on one student's measurement and partitioning schemes and the relationship to her understanding of rate of change functions.

이 분석은 변화율 함수에 대한 이해에 학생들의 크기와 분할 도식, 관계에 초점을 두었다.

Introducing Janet

J was a curious and motivated student. She wanted to triple major in anthropology, biology, and psychology. She took calculus because she had heard that calculus was crucial for being able to model the social and political world quantitatively.

She was curious about how people learned and presented a poster entitled "The Role of Introspection in Children's Theory of Mind Development" at a national Cognitive Development Conference.

Janet 소개

Janet은 호기심이 많고 열의가 있는 학생이었다. Janet은 인류학, 생물학, 심리학의 세 전공을 원했다. Janet은 미적분학을 수강했는데, 미적분학이 사회와 정치 세상을 모델링할 수 있기에 중요하다고 들었기 때문이다.

Janet은 어떻게 사람들이 학습하는지 호기심이 많았고, 국가 인지 개발 학술대회에서 "아동 정신 발달 이론에서의 자기 성찰의 역할" 제목의 포스터를 발표했다.

J's thoughts on fractions and division

분수와 나눗셈에 관한 Janet의 사고

She did not feel that her high school mathematics experiences helped her improve her meanings for fractions because "the standard thing was that teachers gave us fractions and the first step was to get rid of them so we didn't have to think about them." She explained that when she looks at a fraction she "literally just see[s] those as symbols. It is literally not representing anything."

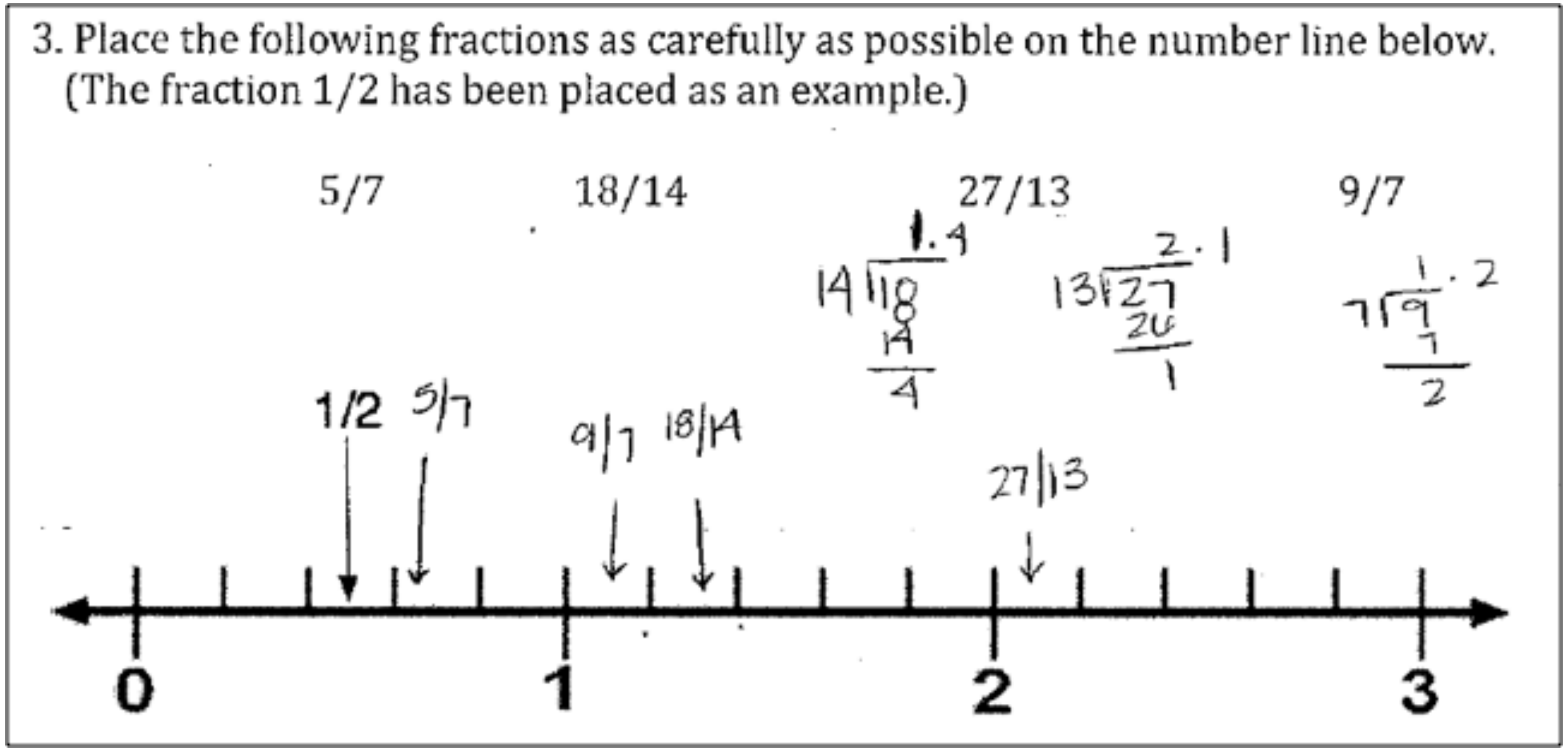
J realized her algorithm for long division was wrong in our interviews and she was mad that she earned so many good grades in math with no one ever noticing she didn't understand the division algorithm.

Janet은 고등학교 수학 경험이 분수에 대한 자신의 의미를 향상하는데 도움이 되지 않았다고 생각했다. 왜냐하면 "수업의 표준은 선생님이 우리에게 분수를 주고 첫 번째 단계는 분수를 제거하여 분수에 대해 생각할 필요가 없도록 하는 것이었기" 때문이다. Janet은 분수를 볼 때 "문자 그대로 그것들을 기호로 봅니다. 말 그대로 아무것도 표현하지 않습니다"라고 설명했다.

Janet은 인터뷰에서 긴 나눗셈 알고리즘이 잘못됐다는 점을 깨달았다. 아무도 Janet이 나눗셈 알고리즘을 이해하지 않았다는 점을 인지하지 못하고 수학에서 좋은 성적을 받았다는 점에 화가 났다.

J's partitioning schemes

Janet의 분할 도식

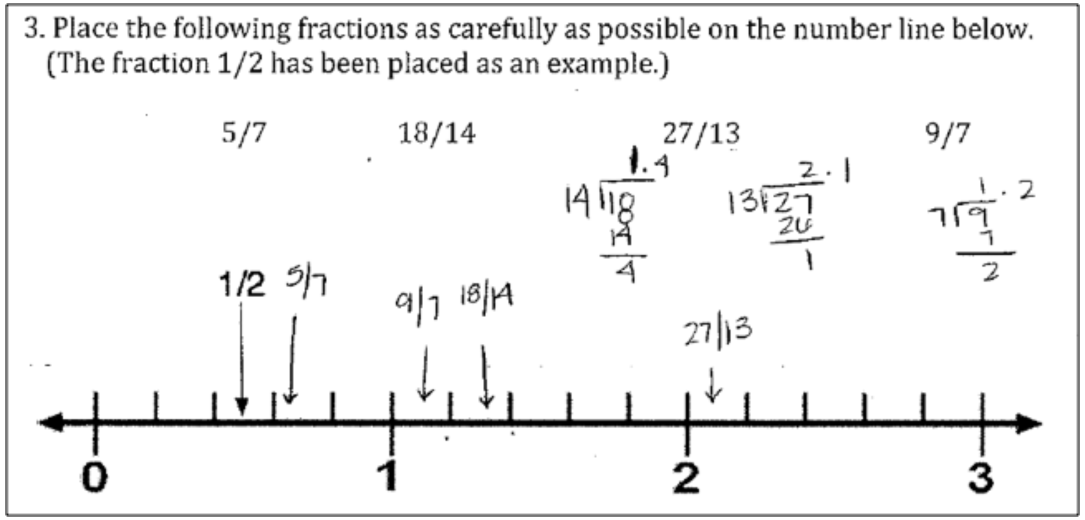

3. Place the following fractions as carefully as possible on the number line below.
(The fraction 1/2 has been placed as an example.)

5/7 18/14 27/13 9/7

아래의 수직선에서 가능한
정확하게 다음 분수를 표시하시오.
(예시: ½)

J's partitioning schemes

Janet의 분할 도식

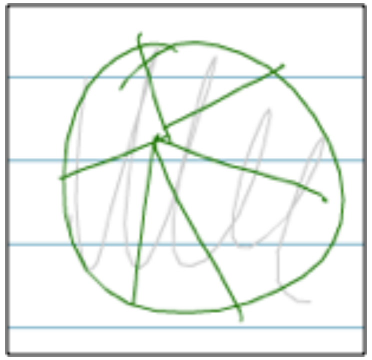

3. Place the following fractions as carefully as possible on the number line below.
(The fraction 1/2 has been placed as an example.)

5/7 18/14 27/13 9/7

아래의 수직선에서 가능한 정확하게 다음 분수를 표시하시오. (예시: ½)

J did not think to repartition 5/7 and 4/5 into thirty-fifths to decide which fraction was bigger.

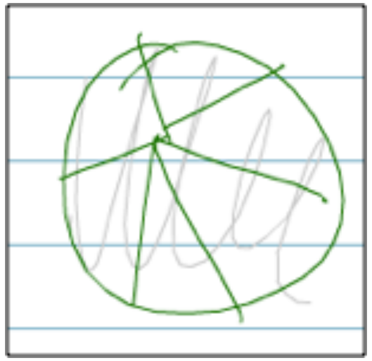
J expressed frustration when trying to cut a circle into five equal pieces.



Janet은 어떤 분수가 더 큰지를 결정하기 위해 5/7과 4/5를 35 재분할로 생각하지 않았다.

Janet은 원을 5등분할 때 좌절감을 나타냈다.

Interviewer: What is the problem with the pie? How come that isn't working for you?
J: Because I can't draw it equally. It is hard for me to visualize it. Cause it is like, you know what I mean?
I: You have a drawing limitation.



J: Right, not uh… yeah.

I: What you'd like is to draw four-fifths perfectly and five-sevenths perfectly.
J: And then be able to visualize.
I: But they are too close to each other to be able to tell from the imperfect drawing.
J: Yes. Right. That is exactly it.

면담자: 파이 문제에서 무엇이 문제인가요? 왜 할 수 없었나요?
Janet: 저는 동일하게 그릴 수 없었기 때문이에요. 시각화하는 것이 저에게 어려웠어요. 그것이 무슨 말인지 아시겠어요?
면담자: 그리는 데 어려움이 있었군요.
Janet: 맞아요.. 어.. 네.
면담자: 4/5를 완벽하게 그리고 5/7을 완벽하게 그리는 것이었군요.
Janet: 그리고 나서 시각화할 수 있어요.
면담자: 하지만 너무 가까이 붙어 있어서 알 수 없어요.
Janet: 네, 맞아요. 정확히 그래요.

Janet은 분수에 관한 강력한 양적 도식을 갖추지 않았다.
J did not have strong quantitative schemes for fractions

J did not think of repartitioning the pieces into thirty-fifths so that she could compare the sizes of the two fractions until I suggested this explicitly.

When I suggested she multiply fractions by one, she did so, then doubted herself because she did not understand the connection between multiplying by 5/5 and partitioning a partition. She did not imagine recursive partitioning to justify seeing 5/5 of 5/7 as equivalent to 5/7. Instead, she felt like did something wrong when multiplying by 5/5 because she did not "do the same thing to both sides."

내가 구체적으로 제안할 때까지 Janet은 두 분수의 크기를 비교하기 위해 조각을 35조각으로 재분할하는 것을 생각조차 하지 않았다.

내가 분수에 1을 곱하자, Janet은 그렇게 했고, 5/5를 곱하는 것과 분할을 나누는 것 사이의 연관성을 이해하지 못했기 때문에 자신을 의심했다. Janet은 5/7의 5/5를 5/7에 해당하는 것으로 간주하는 것을 정당화하기 위해서 반복적인 분할을 상상하지 않았다. 대신 Janet은 5/5를 곱할 때 "양쪽에 같은 일을 하지 않았기" 때문에 뭔가 잘못되었다고 느꼈다.

Further evidence of Janet's limited quantitative schemes for fractions 분수에 관한 Janet의 제한된 양적 도식의 추가 증거

She did not see 6/8 as equivalent to 3/4. If each 1/4 in 3/4 is cut up into two equal pieces it make it possible to see 3/4 and 6/8 as equivalent.

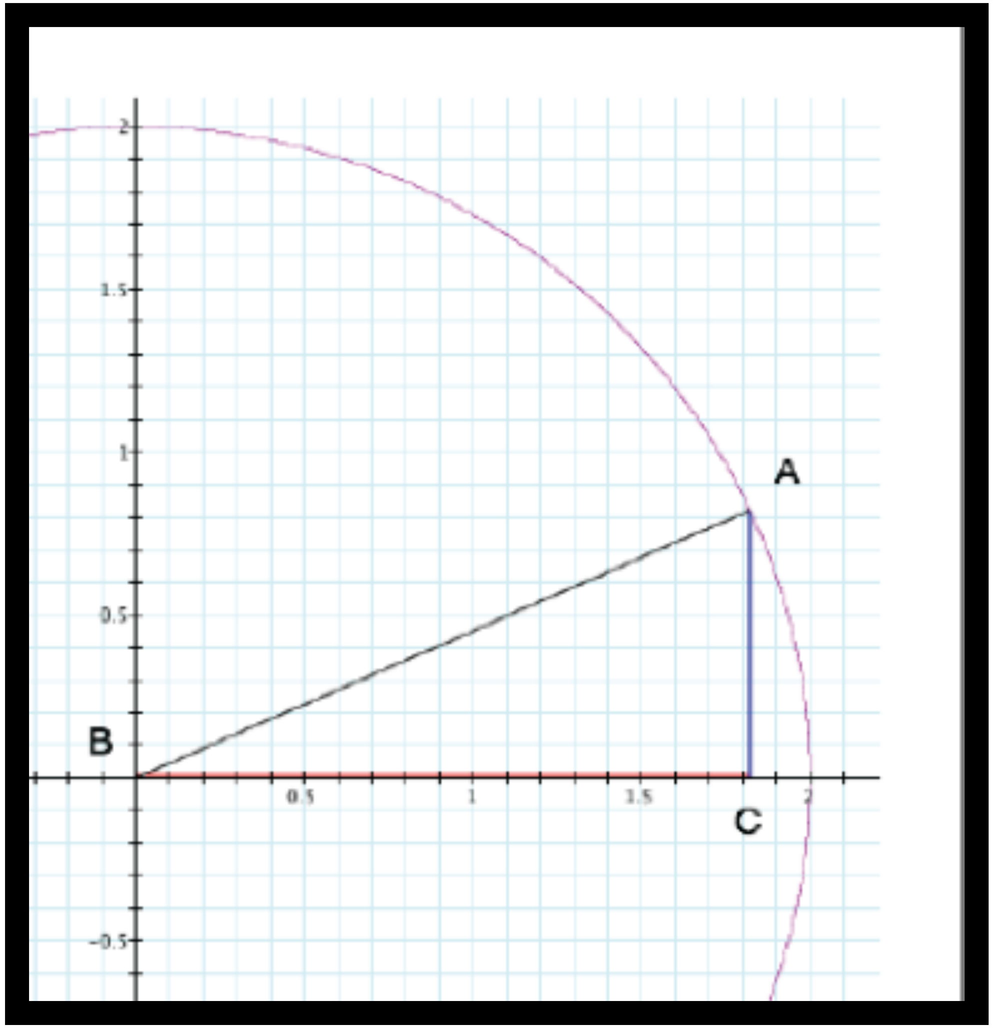
Janet은 6/8을 3/4에 해당하는 것으로 보지 않았다. 3/4에 1/4 각 두 개의 동일한 조각으로 자르면 3/4와 6/8을 동일하게 볼 수 있다.

She suggested subtracting 1/8 from 1/5 to find 1/8 of 1/5.

Janet은 1/5에서 1/8을 빼서 1/5의 1/8을 찾을 것을 제안했다.

Janet’s fraction schemes impacted her attempts to draw a graph of a sine function and the rate of change of a sine function.

Janet의 분수 도식은
사인함수의 그래프와 사인
함수의 변화율을 그리는
Janet의 시도에 영향을 미쳤다.



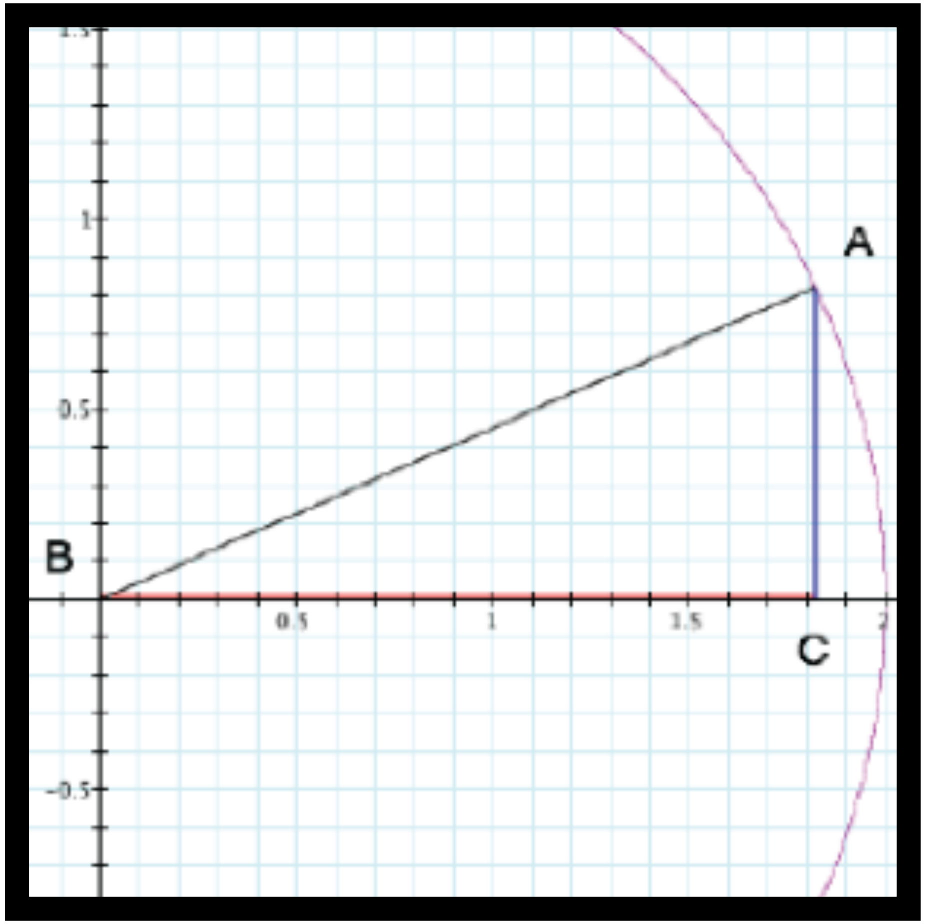
J’s did not have a strong quantitative scheme for improper fractions

Janet은 부적절한 분수에 관한 강력한 양적 도식을 갖추지 않았다.

Prompt: “As the angle’s measure increases from 0 radians to π/2 radians, how does the quotient AC/AB change?”

프롬프트: 각의 크기가 0에서 π/2라디안으로 증가함에 따라 AC/AB의 몫은 어떻게 변화하는가?

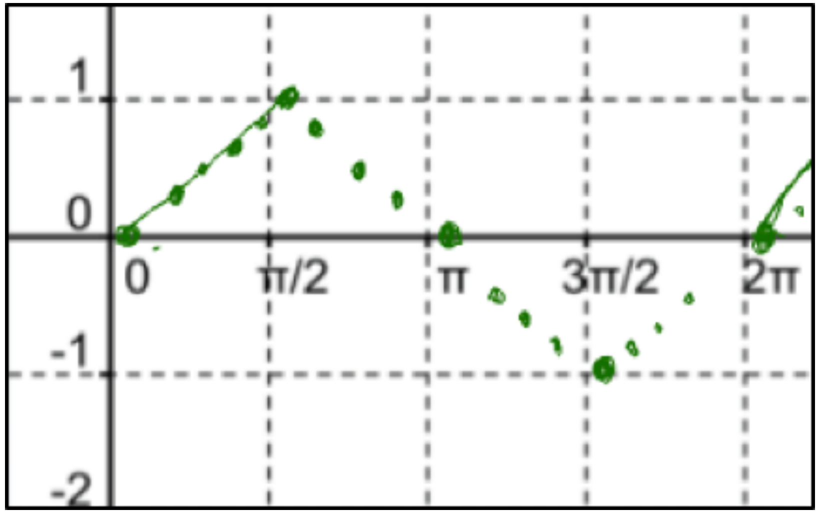
J’s first instinct was to measure the longer segment in terms of the shorter segment and incorrectly estimated that AC/AB was greater than one. With redirection and substantial support she appropriately estimated AC/AB for several values of θ.



J’s struggled to measure Δy in terms of Δx

Janet은 Δx에 대한 Δy를 측정하는 데 어려움을 겪었다.

J: I keep mixing up…
Janet: 헷갈려요..
Interviewer: You mix up which direction you are going.
면담자: Janet, 방향을 헷갈리고 있어요.
J: I do.
Janet: 네.
I: Usually you try to fit the smaller one into the bigger one.
면담자: 일반적으로 작은 것을 큰 것에 맞추려고 해요.
J: That is exactly what it is.
Janet: 바로 그것이에요.



사인함수 변화율 조사
Investigating Rate of Change of Sine

Prompt: "estimate the rate of change of the ratio AC/AB with respect to the angle measure θ for various values of θ. What could we type into graphing calculator to help us make our estimates?" (I told her function was named sine)

프롬프트: "θ의 다양한 값에 대한 각도 측정값 θ에 대한 비율 AC/AB의 변화율을 추정하시오. 추정값 계산에 도움이 되도록 그래프 계산기에 무엇을 입력할 수 있습니까?" (나는 그녀에게 함수 이름이 사인이라고 말했다.)

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin(0)$$

Interviewer: We found the difference, how much the ratio changed between 0 and pi divided by 8. Is that what rate of change of ratio with respect to angle measure means to you?

면담자: 0과 pi를 8로 나눈 비율의 차이를 발견했어요. 각도 측정에 대한 비율의 변화율이 무엇을 의미할까요?

J: That is what I'm thinking.

Janet: 그것이 제가 생각하던 것이에요.

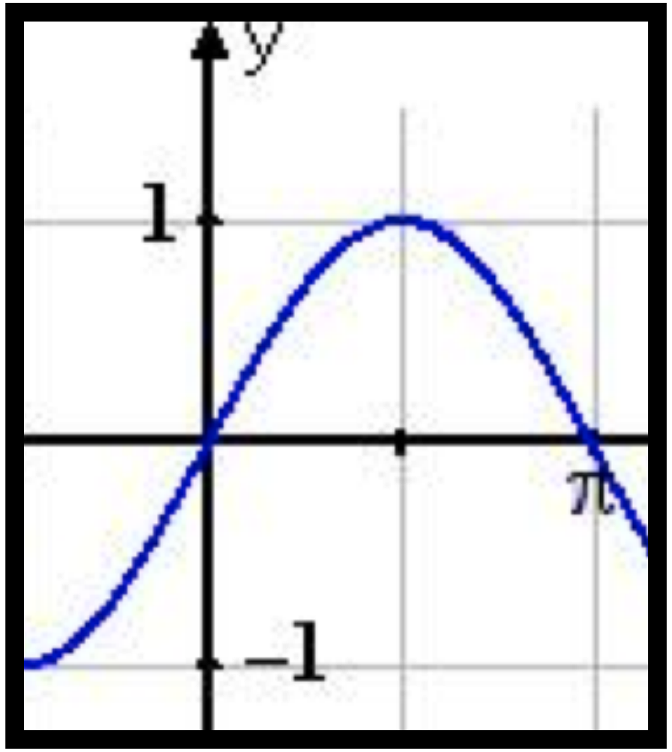
I: So the rate of change of the quantity is how much it changed?

면담자: 그래서 양의 변화율은 얼마나 변했나요?

J: Right.

Janet: 맞아요.

사인함수 변화율 그래핑
Graphing the rate of change of sine



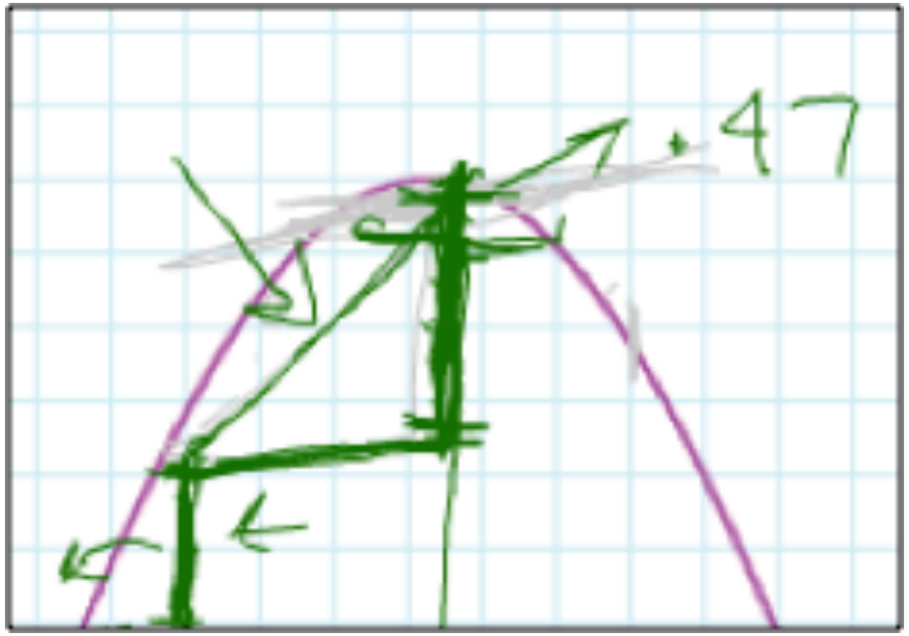
She did not notice that the changes in y were smaller for subsequent equally sized changes in x as x increased from 0 to π/2. She appeared to rely on the accuracy of her drawing and was unable to mentally visualize the changes in y becoming smaller for equally sized changes in x on the concave down graph.

Janet은 x가 0에서 $\pi/2$로 증가함에 따라 x의 동일한 크기 변화에 대해 y의 변화가 더 작다는 점을 알아차리지 못했다. Janet은 그림의 정확성에 의존하는 것처럼 보였고, 위로 볼록한 그래프에서 x의 동일한 크기 변화에 대해 y의 변화가 작아지는 것을 머릿속으로 시각화할 수 없었다.

π/2에 가까운 변화율 측정하기

Estimating the rate of change near π/2

It was not visually obvious to J that the rate of change of sine is essentially zero on a small interval around π/2.



사인함수의 변화율이 π/2 주변의 작은 간격에서 본질적으로 0이라는 것이 Janet에게는 시각적으로 분명하지 않았다.

Interviewer: You said before you did not like small intervals.
J: Yeah. [We laugh.]
I: Is that stressing you out right now?
J: Uhh... I think it just makes it hard for me to conceptualize.
I: What is it about the small intervals that…? Can you articulate what you don't like about them?

면담자: 작은 간격을 좋아하지 않는다고 말했어요.
Janet: 네. [웃음소리]
면담자: 지금 이게 스트레스를 주나요?
Janet: 음… 개념화하는 게 어렵다고 생각해요.
면담자: 작은 간격이 무엇을 의미하나요…? 작은 간격에 관해서 좋아하지 않는 부분을 설명해줄 수 있어요?

J: [we laugh] It is that I… I can’t … I can’t visually create them. Because they are so small. By definition they shouldn’t really be large enough that I can actually draw them. Does that make sense?

I: So…are the intervals we made right here for h, do those bug you? [I point to small, but visible intervals.]

J: No… but I don’t know what they are I guess. They don’t have values assigned, so I can’t…so if you ask me to compute…We are saying that this is similar to the size of these intervals. I don’t know what these are [points to Δx intervals], so I don’t know the size of this [points to associated Δy intervals].

Janet: [웃음] 그게 … 저는 못해요. 저는 시각적으로 만들 수 없어요. 너무 작아서요. 정의에 따라 실제로 그릴 수 있을 만큼 충분히 크면 돼요. 말이 될까요?

면담자: 그래서… 우리가 h를 바로 여기에 두었는데, 그것이 당신을 방해하나요? [작지만 눈에 띄는 간격을 가리켰다.]

Janet: 아니요.. 하지만 그것들이 뭔지 모르겠어요. 할당된 값이 없기 때문에… 할 수 없어요. 만일 당신이 저에게 계산을 요청하면…. 이 간격의 크기와 비슷하다고 말할 것이에요. 저는 이것이 [Δx 간격에 대한 점] 무엇인지 모르기 때문에 이 [관련 Δy 간격에 대한 점]의 크기를 모르겠어요.

J’s Measurement Scheme hindered her understanding of the rate of change function

Janet의 측정 도식은 변화율 함수의 이해에 방해가 되었다.

J was able to carry out a physical measurement process on line segments were visible and when she measured the longer segment in terms of the shorter segment.

Janet은 선분에 대한 물리적인 측정 과정을 수행할 수 있었고, Janet은 짧은 선분에 대한 긴 선분을 측정했다.

Her measurement scheme was not stable enough for her to carry it out in her mind without carrying out the activity of measurement.

Janet의 측정 도식은 활동을 수행하지 않고 Janet이 머릿속으로 수행할 수 있을 만큼 안정적이지 않았다.

J's obstacles to understanding the rate of change of sine

사인함수의 변화율 이해에서 Janet의 장애물

1. Finding 3/4 of 2π to label unit circle (4.5 minutes)
2. Visualizing how the sine ratio changed as θ increased from 0 to $\pi/2$ (19 minutes.)
3. Estimating a rate of change with a difference instead of a quotient.
4. Tried and failed to make equally sized changes in x because she did not know how to write a sequence of equally spaced fractions. (saw 1/2, 1/4, 1/6, 1/8 as equally spaced)
5. Estimated a rate of change by finding $\Delta x/\Delta y$ instead of $\Delta y/\Delta x$.
6. Struggled to see that a concave down function has a decreasing rate of change.

1. 단위원에 라벨을 붙이기 위해 2π 의 ¾ 찾기 (4.5분)
2. θ가 0에서 $\pi/2$로 증가함에 따라 사인의 비율이 어떻게 변했는지 시각화하기 (19분)
3. 몫 대신 차이의 변화율을 추정하기
4. 동일한 간격의 분수 수열을 작성하는 방법을 몰랐기 때문에 x에서 동일한 크기의 변화를 시도했지만 실패했다. (동일한 간격으로 ½, ¼, 1/6, 1/8)
5. $\Delta y/\Delta x$ 대신 $\Delta x/\Delta y$를 찾아서 변화율을 추정했다.
6. 위로 볼록한 함수가 변화율이 감소하는 것을 확인하기 위해 고심했다.

Is J typical? Janet의 사례가 일반적인가?

	Pretest 사전 검사	Test 1 시험 1	Test 2 시험 2	Test 3 시험 3	Final 최종
Janet	33%	82%	82%	50%	65%
Spring 2015 Mean 2015년 봄학기 평균	45%	64%	54%	60%	59%

"It is the worst! I'm doing well on the tests and I am doing well in the class but if you slightly lift up the veil it literally is terrible. How am I able to get A's I and really high B's on these tests when I fundamentally don't understand what a fraction is? [laughs] That blows my mind."
(Note: Tests were curved)

"최악입니다! 나는 시험도 잘 봤고, 수업에서도 잘했는데 베일을 살짝 들어올리면 말 그대로 끔직합니다. 분수가 무엇인지 근본적으로 이해하지 못하는 경우 이러한 시험에서 A를 받는 저와 정말 높은 수준의 B를 어떻게 얻을 수 있습니까? [웃음] 그게 제 마음을 아프게 합니다"
(참조: 커브 평가법으로 시험이 평가되었다)

Part 2　　파트 2

Part 2: Despite the importance of concepts such as ratio, fraction, rate of change, percentage, derivative, measurement, and unit conversions, many undergraduates do not have productive quantitative meanings for these ideas. (Project Aspire, Calculus Tests)

파트 2: 비율, 분수, 변화율, 퍼센트, 도함수, 크기, 단위 전환과 같은 개념의 중요성에도 불구하고, 다수의 대학생들은 이러한 아이디어에 관한 생산적인 의미를 갖추지 않았다.

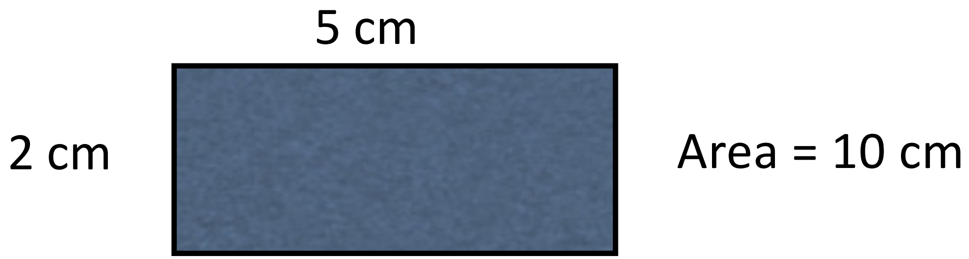
Evidence from literature: US calculus students' struggle with measure
문헌에서의 증거: 미국의 미적분학 수강생은 측정에 어려움을 겪는다.

26.6% of 169 calculus students had correct units in all of their responses to elementary questions like finding the area of a square (Dorko, 2012).

169명의 미적분학 수강생 중 26.6%가 정사각형 면적과 같은 기본적인 질문에 대한 모든 응답에서 올바른 단위를 적었다(Dorko, 2012).

Dorko (2012) "found that the student thinking behind length units used for other spatial computations appears to be that the units of the answer are the same units in which the shape was initially measured" (p. 5).

Dorko (2012) "다른 공간의 계산에 사용된 길이 단위 뒤에 생각하는 학생 답의 단위가 처음 측정된 단위와 동일한 것으로 보인다는 사실을 발견했다" (p. 5).



49% of a nationally representative sample of US 12th graders solved this item correctly

미국 12학년의 국가적으로 대표적인
표본의 49%가 이 항목을 올바르게 풀었다.

The number of pints in 10 gallons could be determined by performing which of the following operations?

A. Multiplying 10 by 2
B. Dividing 10 by 6
C. Multiplying 10 by 6
D. Dividing 40 by 2
E. Multiplying 40 by 2

The students were told that one gallon equals four quarts and one quart equals two pints in the problem.

10 갤런의 파인트 수는 다음 중 어떤 작업을 수행하여 결정할 수 있습니까?

A. 10에 2를 곱하기
B. 10을 6으로 나누기
C. 10에 6을 곱하기
D. 40을 2로 나누기
E. 40에 2를 곱하기

학생들은 문제에서 1 갤런은 4 쿼트이고, 1 쿼트는 2 파인트와 같다고 들었다.

크기는 고도로 교육받은 사람들에게 어렵다.
Measurement is difficult for many highly educated people

Difficulties with measurement are also common in doctors with medical degrees. For example, in one study there were 55 medication errors per 100 patients admitted with 28% of those errors related to prescribing appropriate doses of medicine (Kaushal et. al., 2001).

Chemistry students' difficulties with measurement has driven many to investigate more effective methods of teaching unit conversions; for instance, by including descriptive words with calculations (DeLorenzo, 1994), having students work collaboratively with manipulatives (Saitta, Gittings, & Geiger, 2011), and using interactive software that shows the sizes of units (Ellis, 2013).

의학 학위를 가진 의사들에게도 흔히 측정의 어려움이 보고된다. 예를 들어, 한 연구에서 입원한 환자 100명당 55건의 투약 오류가 있었고 그 중 28%는 적절한 약의 복용량과 관련된 오류였다(Kaushal et al., 2001).

측정에 대한 화학도의 어려움 때문에 많은 학생들이 단위 변환을 가르치는 더 효과적인 방법을 조사하게 되었다. 예를 들어, 계산에 설명어를 포함하고 (DeLorenzo, 1994), 학생들이 조작법으로 공동 작업하게 하고(Saitta, Gittings, & Geiger, 2011), 단위 크기를 보여주는 대화형 소프트웨어를 사용한다(Ellis, 2013).

미국 의과대학 졸업생 135명 시험
Test of 135 US Medical School Graduates

Five questions involved the calculation of doses of drugs commonly used in hospital. Only 33/135 (24%) of the doctors answered all five correctly, while 102/135 (76%) of them made errors that could have caused serious harm in clinical practice.

병원에서 일반적으로 사용되는 약물의 용량 계산과 관련된 다섯 가지 질문이 있었다. FT 중 33/135 (24%)만이 5개 모두 정답을 맞췄으며, 그중 102/135 (76%)는 임상 실습에서 심각한 피해를 입힐 수 있는 오류를 범했다.

Doctors also had difficulty calculating the correct volume of local anaesthetic to administer to a patient on a question that required candidates to convert the dose from mg/kg body weight to a volume in ml. Although 108/135 (80%) of the doctors calculated the correct volume, five (3.7%) of them selected a lethal dose of almost four times the therapeutic maximum. (Taylor, 2017)

또한 후보자가 복용량을 mg/kg 체중 단위에서 ml 단위로 변환해야한다는 질문에 대해 재단 연수생 의사들은 환자에게 투여할 정확한 국소 마취제의 부피를 계산하는 데 어려움을 겪었다. FT의 108/135 (80%)가 정확한 부피를 계산했지만 그중 5개 (3.7%)는 치료 최대치의 거의 4배에 달하는 치사량을 선택했다(Taylor, 2017).

Aspire 프로젝트의 개관
Overview of Project Aspire

Dr. Pat Thompson and his research team designed and validated an assessment of secondary teachers' mathematical meanings for teaching. The assessment included 2 items about measurement and a variety of items involving rate of change.

Thompson 교수와 연구팀은 교수를 위한 중등 수학 교사의 수학적 의미의 평가를 설계하고 타당화 했다. 평가는 측정에 대한 두 개의 항목과 변화율을 포함한 다양한 항목을 포함했다.

Aspire 프로젝트의 개관
Overview of Project Aspire

<표 1> 전공, 학교급에 따른 미국 교사와 한국 교사의 수

Table 1. US and SK teachers, school level by major

	Math Majors	MathEd Majors	Other Major	Total
Korea High School teachers	81	175	7	263
Korea Middle School teachers	33	49	19	101
U.S. ≥Calc teachers*	29	24	21	74
U.S. <Calc teachers, **	34	59	85	178
Total	177	307	132	616

* ≥Calc means U.S. high school teachers who taught calculus or higher at least once
** <Calc means U.S. high school teachers who never taught calculus
*** Two Korean teachers and one U.S. teacher did not report their degrees.

*≥Calc는 미적분학 이상의 과목을 한번 이상 가르쳤던 미국 고등학교 교사를 의미한다.
**<Calc는 미적분학을 가르쳐 본 경험이 없는 미국 교사를 의미한다.
***두 한국 교사와 한 명의 미국 교사는 학위를 보고하지 않았다.

Aspire 연구에서 측정 항목

Measurement Items from Aspire Study

A container has a volume of *m* liters. One gallon is 189/50 times as large as one liter. What is the container's volume in gallons?

부피가 m 리터의 용기가 있다. 1 갤런은 1 리터의 $\frac{189}{50}$ 배 만큼 크다. 이 용기의 부피를 갤런으로 나타내고, 그 이유를 설명하시오.

In Nerdland they measure lengths in Nerds. The highlighted arc measured in Nerds is 12 Nerds. In Rapland they measure lengths in Raps. One Rap is 3/4 the length of one Nerd. What is the measure of the highlighted arc in Raps?

너드나라에서 사람들은 너드라는 단위를 사용하여 길이를 측정한다. 다음 굵게 표시된 호를 너드로 측정하면 12 너드이다. 랩나라에서 사람들은 랩이라는 단위를 사용하여 길이를 측정한다. 1 랩은 1 너드의 $\frac{3}{4}$ 이다. 굵게 표시된 호의 길이를 랩으로 나타내면?

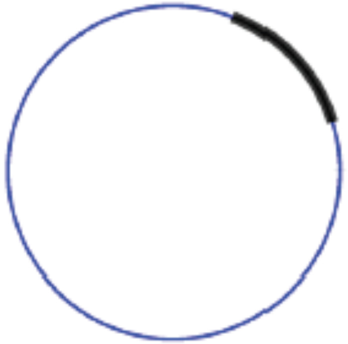
미국 교사와 한국 교사가 두 항목을 올바르게 답한 퍼센트를 추측해주세요.

Guess what percent of US and SK teachers answered both items correctly.

A container has a volume of *m* liters. One gallon is 189/50 times as large as one liter. What is the container's volume in gallons?

In Nerdland they measure lengths in Nerds. The highlighted arc measured in Nerds is 12 Nerds. In Rapland they measure lengths in Raps. One Rap is 3/4 the length of one Nerd. What is the measure of the highlighted arc in Raps?

(Byerley & Thompson, 2017)



Poll 1: Select what percent of US and SK secondary mathematics teachers answered both items correctly. Both groups were paid to take test.

1. 21 % of US teachers and 42% of SK teachers
2. 55 % of US teachers and 80 % of SK teachers
3. 74 % of US teachers and 91% of SK teachers
4. 74% of US teachers and 51% of SK teachers.

Aspire 연구에서 '갤런에서 리터로'

Gallons to Liters from Aspire Study

21% of 251 US high school math teachers in sample responded correctly to both Nerds and Raps and Gallons to Liters.

42% of a nationally representative sample of 336 South Korean teachers responded correctly to both tasks.

The quality of responses was not correlated to their degree. Math majors were not more likely to be successful on measurement tasks (Byerley and Thompson, 2017).

21% of 251 US 고등학교 수학 교사 중 21%가 Nerds, Raps와 갤런에서 리터 변환 문항에 모두 올바르게 응답했다.

전국적으로 대표가 되는 336명의 한국 교사 중 42%가 두 가지 과제에 모두 올바르게 응답했다.

응답의 질은 학위와 관련이 없었다. 수학 전공자는 측정 과제에서 성공할 가능성이 더 높지 않았다(Byerley and Thompson, 2017).

‘갤론에서 리터로’ 예시 답안
Example Answers to Gallons to Liters

$$\cancel{\frac{G}{L}} =$$

$$G = \frac{189}{50} L$$

$$G = \frac{189}{50} m \text{ gallons}$$

1 gallon 1 liter

1 갤런 1 리터

$189 : 50$

$x : m$

$$x : m = 189 : 50$$

$$50x = 189m$$

$$x = \frac{189}{50} m$$

Gallons to Liters

	Correct: (50/189)m	Incorrect: (189/50) m	Other	Total Secondary Math Teachers
USA	47%	43%	10%	251
South Korea	51%	41%	8%	336

Nerds to Raps

	Correct: 16 Raps	Incorrect: 9 Raps	Other
USA	34%	47%	18.5%
South Korea	58%	30%	12%

미적분학 수강생 연구의 개관
Overview of my study of calculus students

- How do a large sample of Calculus Students at Colorado State University and Arizona State University respond to fraction, measure, and rate items on a diagnostic pretest?
- 콜로라도 주립 대학과 애리조나 수립 대학에서 큰 표본의 미적분학 수강생들은 진단 평가에서 분수, 크기, 비율에 대한 항목에 어떻게 반응하는가?
- How typical are the experiences of the students in the qualitative study?
- 질적 연구에서 학생들의 경험은 일반적인가?

Gallons to Liters (Multiple Choice)

갤론에서 리터로 (객관식)

A container has a volume of m liters. One gallon is 189/50 times as large as one liter. What is the container's volume in gallons?

컨테이너의 부피가 m리터이다. 1 갤론은 1리터의 189/50배이다. 컨테이너의 부피는 몇 갤론인가?

$\left(\frac{189}{50}\right)^3 m$ $\left(\frac{50}{189}\right)^3 m$

$\left(\frac{189}{50}\right) m$ $\left(\frac{50}{18}\right) m$

Shoe Measure 신발의 측정

Bob and Kat are using their shoes to measure the length of a rug. Bob's shoes are 12/11 times as long as Kat's shoes. The rug is 10.4 *Bob shoe lengths long*. How many times would Kat's shoes fit in the length of the rug?

Bob과 Kat은 카페트의 길이를 측정하기 위해 자신의 신발을 사용하려 한다. Bob의 신발은 Kat의 신발의 12/11배였다. 이 카페트는 Bob의 신발의 길이의 10.4배였다. 카페트의 길이를 재기 위해 Kat의 신발로 얼마나 많이 세어야 하는가?

a) (12*10.4)/11
b) 10.4/(12/11)
c) 10.4/(12*11)
d) (12*11)/10.4
e) None of the above

a) (12*10.4)/11
b) 10.4/(12/11)
c) 10.4/(12*11)
d) (12*11)/10.4
e) 답이 없음

Fractions on a Number line 수직선에서의 분수

Place the following fractions as carefully as possible on the number line below. (The fraction 1/2 has been placed as an example.)

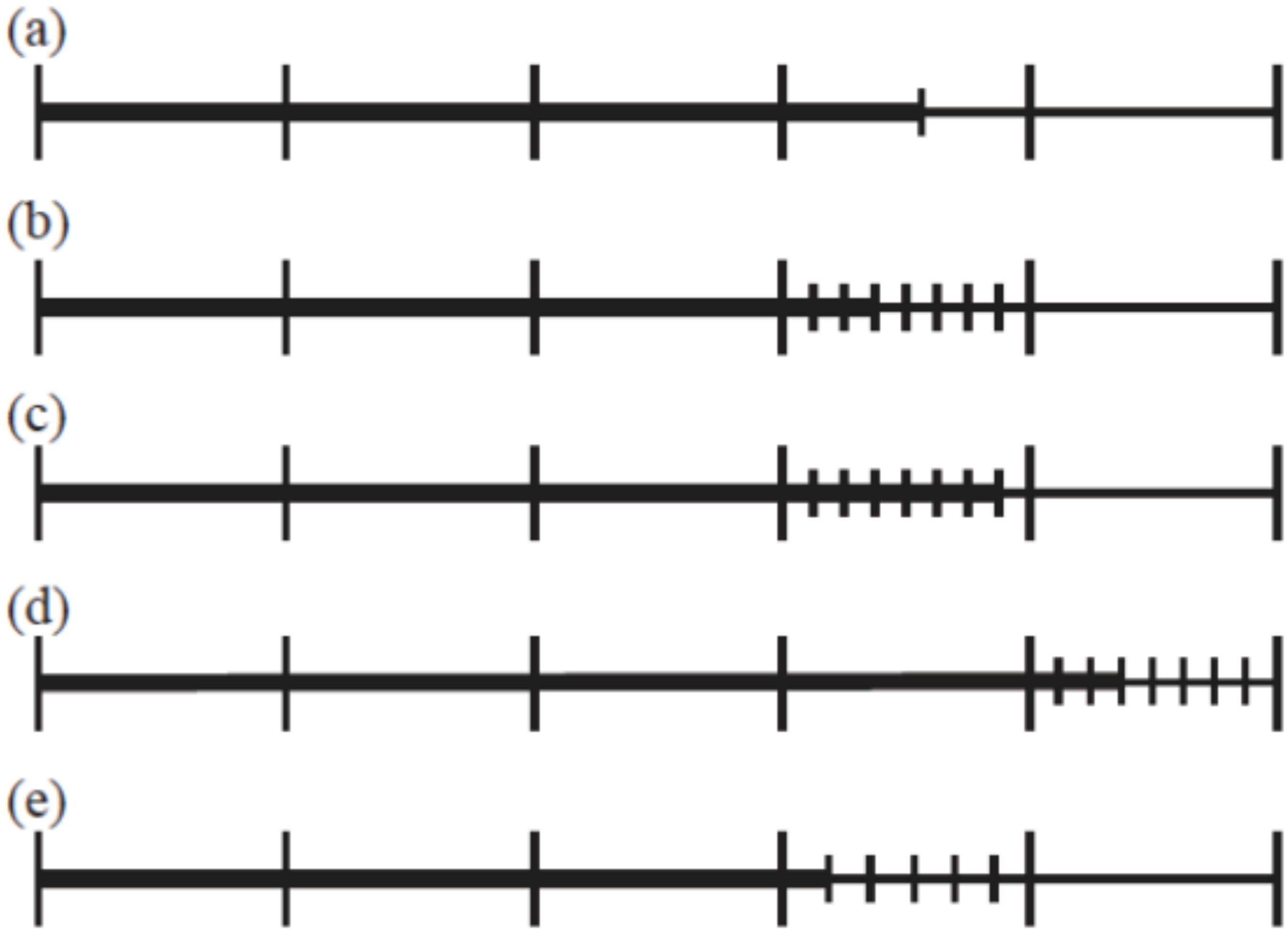
아래의 수직선에서 가능한 정확하게 다음 분수를 표시하시오. (예시: ½)

5/7 18/14 27/13 9/7

Ms. Roland gave her students the following problem to solve:

Candice has 4/5 of a meter of cloth. She uses 1/8 of a meter for a project. How much cloth does she have left after the project?

She had students use the number line so that they could draw the lengths. Which of the following diagrams shows the solution? Assume all intervals are subdivided equally.



Fraction of Cloth
옷감에 대한 분수

Ms. Roland는 다음과 같은 문제를 제시하였다.

Candice는 4/5 미터의 옷감이 있다. Candice는 프로젝트를 위해 1/8 미터를 사용했다. 프로젝트 이후에 얼마나 많은 옷감이 남아있는가?

Ms. Roland 는 길이를 그리기 위해 학생에게 수직선을 사용하게 했다. 다이어그램 중 이 문제에 대한 답을 나타내는 것은? 모든 구간이 등분되었다고 가정하자.

	Percent of students with correct answers to pretest items. **사전 검사 항목 정답률 퍼센트**			
Course 과목	**Fraction of Cloth** **옷감에 대한 분수**	**Gallons to Liters** **갤런에서 리터**	**Fractions on a Number Line** **수직선 상의 분수**	**Shoe Measure** **신발 측정**
First Semester Calculus at Arizona State University **첫 번째 학기 미적분학**	26.7% of 153	15.6% of 153	52.2% of 153 placed all fractions correctly 153명 중 52.2%가 모든 분수를 올바르게 나타냈다.	Not given 제시되지 않음
Second Semester Calculus at Colorado State University **두 번째 학기 미적분학**	42.2% of 490	27.3 % of 868	Not administered 미실시	41.7 % of 378
First Semester Calculus at Colorado State Universty **첫 번째 학기 미적분학**	Not administered 미실시	21.1% of 592	Not administered 미실시	33.7% of 738

COVID-TASER NSF Project
How are people interpreting COVID-19 data?

We designed an interview protocol by collecting representations of COVID-19 data that we hypothesized would be interpreted differently by citizens with varying mathematical understandings.

COVID-TASER NSF 팀은 다양한 수학적 이해에 따라 시민들이 코로나 19 관련 자료에 다르게 이해할 것이라는 가설을 가지고 인터뷰 프로토콜을 디자인했습니다.

We used zoom to conduct task-based clinical interview with 25 US citizens and 7 SK citizens between April 2nd, 2020 and May 11th, 2020 (Ginsburg, 1997; Goldin, 1997).

COVID-TASER NSF 팀은2020년 4월 2일부터 5월 11일에 25명의 미국 시민들 그리고 7명의 한국 시민들을 과제기반 클리니컬 인터뷰를 줌으로 시행했습니다.

We analyzed participants' responses by transcribing and coding interviews using models of mathematical thinking as guidance. (Yoon, et. al., 2021)

COVID-TASER NSF 팀은 수학적 사고 모델을 이용하여 참여자들의 응답을 전사하고 코딩하여 분석하였습니다.

Research Questions

General: How do citizens' mathematics support them in assessing the severity of COVID-19?

큰 질문: 시민들의 수학은 코로나 19의 심각성을 평가하는데 어떻게 도움을 주는가?

For this talk: How do citizens make comparisons of relative sizes of quantities related to COVID-19?

오늘의 기조강연: 시민들이 코로나 19 관련 숫자의 상대적 크기를 어떻게 비교하는가?

Flu versus Covid-19 Rates

Scientists (such as Wu and team) estimate the symptomatic fatality rate for COVID-19 is between 0.9 and 2.1%. The symptomatic fatality rate for the seasonal flu is usually about 0.1% in the U.S.

A. How should this data impact decision making about social distancing?

B. Suppose there are two hypothetical situations. In one situation 50 million people get the flu. In the other situation 50 million people get the coronavirus. Assuming the death rates of .1% and 2.1% how many times as many people will die from the coronavirus as the flu?

Flu versus Covid-19 Rates

2. 아래 데이터들이 사회적 거리두기에 대한 의사결정에 어떻게 영향을 주어야한다고 생각합니까?

   a. 과학자들은 COVID-19 치사율을 0.66 에서 2.1%로 추정했다. 독감으로 인한 치사율은 미국에서 보통 0.1% 정도이다.

   b. 5 천만 명의 사람들이 독감에 걸렸고, 5 천만 명의 사람들이 코로나 바이러스에 걸렸다고 가정해보세요. 독감 사망률이 0.1%, 코로나 바이러스 사망률이 2.1% 라고 하면 독감보다 코로나 바이러스 때문에 사망하는 사람들이 몇 배나 많을까요?

Eunseok: 0.1% of 50 million is 1/1000 of 50 million. Then… isn't it 50,000? 1 million people would die when death rate of the coronavirus is 2.1% since it is like 2/100. Then isn't that 20 times more?

은석: 5천만 명의 0.1% 면 5000명의 1/1000이다. 그러면 5만명 이지 않나?
코로나바이러스가2% 라면 2/100이므로100만 명이 죽는다. 그러면 20배가 많지 않은가요

Amelia: The numbers of 50 million and 50 million do not matter. You're comparing 0.1 to 2.1. You could be saying you are comparing one to 21. I guess we'll take 21 times. We'll take 21 times as many.

아멜리아: 5천만 명은 상관없다. 0.1과 2.1을 비교하는 것이다. 1과 21을 비교하는 것이라고 할 수 있다. 아마 21배일 것 같다.

HY: What makes you say 2.1 was much more dangerous than 0.1?
EJ: I think two percent more is bigger in extreme situations.

HY: What does that mean? What did you compare it to?
EJ: The flu rate is 0.1 while corona is 2.1, so I thought it was higher.
HY: What made did you feel that 0.1% and 2.1% were a big difference? It's 2%, but you felt it was a big difference, right? Why did you feel that was a big difference? (gave her an example of tipping 2%)
EJ: Well, 2% may be small in amount or statistically, but if that two percent case happens to me…, because of the possibilities it may happens to me, I feel like it’s a big different. It is not absolute but relative possibility makes me feel like that.

HY: How many times as large is 2.1 and 0.1?
EJ: Isn't a big difference, actually? It's two percent, but it's not twice, and now it's...It's a big difference.

HY: 2.1이 0.1보다 훨씬 위험하다고 말한 이유는?

EJ: 저는 2프로 많은 것도 극한 상황에서는 더 크다고 생각이 들어요.

HY: 2프로가 많다는 게 무슨 의미일까요? 뭐랑 비교하신건가요? 아니면 2% 자체가..

EJ: 독감치사율이 0.1인데 반해 코로나는 2.1이렇게 되어있어서, 그걸로 보면 더 높다고 생각을 한 거에요 저는.

HY: 아, 0.1과 2.1퍼센트가 왜 큰 차이로 느껴지신거에요? 2%지만 그게 큰 차이로 느껴지신거죠? 왜 그게 큰 차이로 느껴지셨어요?
EJ: 저는 금액이나 통계상의 2프로는 작을 수 있지만, 그 2프로가 나한테 온다면…. 가능성 확률 때문에 더 많게 느껴져요. 절대적인 그런게 아니고 상대적인 확률이랄까요

HY: 2.1과 0.1이 몇 배 차이인가?

EJ: 굉장히 많이 차이나는 거 아닌가요 사실? 2프로라고 하지만 0.1과 2.1 비교니깐 두 배도 아니고 지금 네…많이 차이나게 느껴져요.

Comparisons of Relative Size are Difficult for Highly Educated Citizens in the United States

In United States we interviewed high school mathematics teachers as well as a doctor working with COVID patients (Yoon, et. al., 2021).

Both of them had a hard time comparing the relative size of 2.1 and 0.1. The doctor was able to figure it out, but was embarrassed it was so hard for him. The mathematics teacher struggled for 5 minutes and did not solve the problem.

Responses to “Flu vs. COVID-19 rates”

	Approximately correct multiplicative comparison.	Incorrect multiplicative comparison.	Asked to make multiplicative comparison but citizen didn’t respond	Said 2% of a large number is very large.	Said 2.1% and 0.1% are both small so COVID-19 is not too serious	Said scientists incorrectly estimated infection fatality rates for COVID-19.
Flu is more severe than COVID-19	1	1	2	3	1	2
COVID-19 is more severe than flu	12	9	1	12	1	0
Unsure if flu or COVID-19 is worse	0	0	1	2	0	0
Subtotal	13	10	4	17	2	2

Part 3: How should we help college students?

파트 3: 우리는 어떻게 대학 학생을 도와주어야 하는가?

Part 3: Open question: Do university professors have a responsibility to help undergraduates develop productive quantitative meanings that allow them to make comparisons of relative size? If so, how should we do that?

파트 3: 열린 질문: 대학의 교수자들은 대학 내용을 가르칠 때 어떻게 학생들이 상대적 크기를 비교하도록 돕는가?

A container has a volume of *m* liters. One gallon is 189/50 times as large as one liter. What is the container's volume in gallons?

In Nerdland they measure lengths in Nerds. The highlighted arc measured in Nerds is 12 Nerds. In Rapland they measure lengths in Raps. One Rap is 3/4 the length of one Nerd. What is the measure of the highlighted arc in Raps?

Poll 2: Is it important for college students to be able to solve problems like "Gallons to Liters" and "Nerds to Raps?"

A. Yes.
B. Somewhat.
C. No.

Poll 3: Do you think college instructors have a responsibility to help college students develop quantitative meanings for measurement?

A. Yes.
B. Somewhat.
C. No.

Poll 4: College instructors do not have infinite time in class. Suppose your college students have weak schemes for measurement. Should you take out college level material from the course to talk about secondary material?

A. Yes.
B. Occasionally.
C. No.

If you want, please explain your answer in the zoom chat in English or Korean.

THANK YOU!
감사합니다

cbyerley@uga.edu

www.covidtaser.com

https://cameronbyerley.wordpress.com/

References

Byerley, C., & Thompson, P. W. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 168-193.

Byerley, C. (2019). Calculus students' fraction and measure schemes and implications for teaching rate of change functions conceptually. *The Journal of Mathematical Behavior*, *55*, 100694.

Dorko, A. J. (2012). Calculus students' understanding of area and volume in non-calculus contexts.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72.

Lobato, J., Ellis, A. B., & Muñoz, R. (2003). How" focusing phenomena" in the instructional environment support individual students' generalizations. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 1-36.

Steffe, L. P., Liss, D. R. I., & Lee, H. Y. (2014). On the operations that generate intensive quantity. *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing*, *4*, 49-79.

Stump, S. L. (2001). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, *101*(2), 81-89.

Thompson, P. W. (2012). Advances in research on quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield & S. Belbase (Eds.), Quantitative reasoning: Current state of understanding, WISDOMe Monographs (Vol. 2). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., Byerley, C., & Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus made possible by technology. *Computers in the Schools*, *30*(1-2), 124-147.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., Byerley, C., & Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: A hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra 1, 2, 3. *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing*, *4*, 1-24.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational studies in mathematics*, *26*(2), 229-274.

White, P., & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for research in mathematics education*, *27*(1), 79-95.

Yoon, H., Moore, K., Park, M. S., Musgrave, S., Valaas, L., Drimalla, J., & Byerley, C. O. N. COVID-19• COVID-19 data representations are interpreted in multiple ways by US and South Korean citizens• Citizens' mathematics and beliefs impact how they assess the severity of COVID-19• Models of students' mathematical thinking are useful to improve COVID-19 data.